Problemas de divisibilidad

Tras entender los ejemplos resueltos, realiza los ejercicios propuestos

EJEMPLO RESUELTO

Calcula el máximo común divisor (m.c.d.) y mínimo común múltiplo (m.c.m.) de: 428 y 376

Descomposición en factores primos:

```
428| 2        376| 2
214|2         188|2
107|107        94|2
  1|           47|47
                1|
```

$428 = 2^2 \cdot 107$

$376 = 2^3 \cdot 47$

m.c.d.: producto de factores comunes de menor exponente

m.c.d.(428, 376) = 2^2 = **4**

m.c.m.: producto de factores no comunes y de factores comunes de mayor exponente

m.c.m.(428, 376) = $2^3 \cdot 107 \cdot 47$ = **40 232**

EJERCICIO PROPUESTO

1. Calcula el máximo común divisor (m.c.d.) y mínimo común múltiplo (m.c.m.) de:

a) 72 y 16

b) 656 y 848

EJEMPLO RESUELTO

Un viajero va a Barcelona cada 18 días y otro cada 24 días. Hoy han estado los dos en Barcelona. ¿Dentro de cuantos días volverán a estar los dos a la vez en Barcelona?

El primer viajero viaja el día 18, el día 36, el día 54, el día 48, el día 90... Son los múltiplos de 18

El segundo viajero viaja el día 24, el día 48, el día 72, el día 96, el día 120... Son los múltiplos de 24

Los dos coinciden cuando viajan el mismo día, es decir, cuando viajan un día que es múltiplo de 18 y de 24.

El primer día que coinciden es el menor número que puede ser dividido por 12 y 24

Por tanto tenemos que calcular el $\mathrm{mcm}(18, 24)$

En primer lugar descomponemos los números en factores primos

$$\begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$18 = 2 \cdot 3^2$$
$$24 = 2^3 \cdot 3$$

Tomamos los comunes y no comunes de mayor exponente
$\mathrm{mcm}(18, 24) = 2^3 \cdot 3^2 = 72$

Dentro de 72 días

EJERCICIO PROPUESTO

2. Dos autobuses salen del inicio de su ruta a las 23.00 horas del día 21 de septiembre. Si hacen un recorrido circular que tardan en recorren 42 minutos uno y 48 minutos el otro, calcula a qué hora vuelven a coincidir en el inicio de la ruta.

EJEMPLO RESUELTO

En una bodega hay 3 toneles de vinos diferentes, cuyas capacidades son: 250 L, 360 L, y 540 L. Su contenido se quiere envasar en cierto número de garrafas iguales, sin mezclar los vinos. Calcular las capacidades máximas de estas garrafas para que en ellas se pueda envasar el vino contenido en cada uno de los toneles, y el número de garrafas que se necesitan.

Solución

Para poder envasar los 250 L en garrafas más pequeñas tenemos que elegir un número que sea divisor de 250

Para poder envasar los 360 L en garrafas más pequeñas tenemos que elegir un número que sea divisor de 360

Para poder envasar los 540 L en garrafas más pequeñas tenemos que elegir un número que sea divisor de 540

Como el contenido de las garrafas ha de ser el máximo posible, debemos hallar el $\mathrm{mcd}(250, 360, 540)$

En primer lugar descomponemos los números en factores primos

$$
\begin{array}{r|l} 250 & 2 \\ 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l} 360 & 2 \\ 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l} 540 & 2 \\ 270 & 2 \\ 135 & 3 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}
$$

$$250 = 2 \cdot 5^3$$
$$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$$
$$540 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2$$

Tomamos los comunes de menor exponente

$$\text{mcd}(250, 360, 540) = 2 \cdot 5 = 10$$

Capacidad de las garrafas $= 10$ L

Número de garrafas de $T_1 = \frac{250}{10} = 25$

Número de garrafas de $T_2 = \frac{360}{10} = 36$

Número de garrafas de $T_3 = \frac{540}{10} = 54$

Número de garrafas $= 25 + 36 + 54 =$ **115 garrafas**.

EJERCICIO PROPUESTO

3. En un almacén hay tres sacos de productos de pastelería, que contienen 24 magdalenas, 36 galletas y 42 roscas. Su contenido se quiere envasar en cierto número de paquetes iguales, sin mezclar productos diferentes. Calcular las capacidades máximas de estos paquetes para que en ellos se pueda envasar el contenido de los productos, y el número de paquetes que se necesitan.